Уравнением Гельмгольца (однородным) называется следующее уравнение:
$\triangle u(M) + cu(M) = 0,$
где $c \neq 0$ — заданный коэффициент. Мы будем рассматривать только $c = \text{const}$.
Если $c > 0$, то уравнение Гельмгольца называется волновым и записывается в виде:
$\triangle u(M) + k^2 u(M) = 0, \qquad k > 0.$
Если $c < 0$, то уравнение Гельмгольца называется неволновым и записывается в виде:
$\triangle u(M) - \varkappa^2 u(M) = 0, \qquad \varkappa > 0.$

Название новое, а уравнение старое. Это же хорошо знакомое нам уравнение на СФ, оно же λ-уравнение!
В чём же тут будет новизна, зачем мы вернулись к уже, казалось бы, прошедшему материалу? Раньше мы искали СФ, то есть такие значения λ (т.н. СЗ), при которых и при однородных ГУ были бы нетривиальные решение.

Здесь ситуация иная – у нас k (аналог λ) задано, но и ГУ могут быть неоднородны. Мы по сути решаем задачу 3 (краевую задачу!), но уже не с простым уравнением Лапласа, а с λ-уравнением (которое здесь уже надо называть k-уравнением).

Например, рассмотрим решение k-уравнения в полярных координатах.
$\Delta u + k^2 u = 0$

$$u = R(r)\Phi(\varphi)$$

$$\frac{r\frac{d}{dr}(rR') + k^2 r^2 R}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \nu$$

$$\Phi_n = \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}, \quad \nu_n = n^2, \quad n = 0, 1, 2.$$

$$r^2 R'' + r R' + (k^2 r^2 - n^2) R = 0$$

$$R_n = A J_n(kr) + B N_n(kr)$$

$$U_n = \begin{matrix} J_n(kr) \\ N_n(kr) \end{matrix} \Bigg\} \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{Bmatrix}$$

Его решения очень похожи на СФ, но есть два отличия.
1) В СФ вместо k стояло СЗ. А СЗ – это не все числа, отнюдь не все, это дискретный набор. k же у нас какое придётся.
2) В ответе у нас один индекс, а не два. Второй индекс в СФ появлялся за счёт того, что мы приравнивали ГУ к нулю и получали набор корней у уравнения, которые и были СЗ. Сейчас нам это делать не надо.

Назовём полученные функции псевдо-СФ круга при данном k.
И мы именно по этим псевдо-СФ будем раскладывать решение краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, & 0 \le r < a, \\ u|_{r=a} = f(\varphi). \end{cases}$$

Здесь ГУ Дирихле, решение задачи с другими ГУ ничем принципиально не отличается.
Раскладываем решение по псевдо-СФ:

$$u(r,\varphi) = A_0 J_0(kr) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(kr)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

А далее, разумеется, подставляем ГУ: r=a.

$$u|_{r=a} = A_0 J_0(ka) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(ka)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = f(\varphi)$$

Удобно разложить f(φ) по синусам и косинусам

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi, \qquad C_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi, \qquad D_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi,$$

$n = 1, 2, \ldots$

Получаем следующую систему уравнений

$$A_0 J_0(ka) = C_0, \qquad A_n J_n(ka) = C_n, \qquad B_n J_n(ka) = D_n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Если мы «не попали в резонанс», т.е. $J_n(ka)$ не 0 при любом n, то все Ашки и Вшки определяются однозначно.

$$A_0 = \frac{C_0}{J_0(ka)}, \qquad A_n = \frac{C_n}{J_n(ka)}, \qquad B_n = \frac{D_n}{J_n(ka)}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

А вот случай попадания в резонанс – особенный. Тут решений может быть бесконечно много. Рассмотрим пример.

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & r < a \\ u|_{r=a} = \sin^3\varphi = \frac{3}{4}\sin\varphi - \frac{1}{4}\sin 3\varphi \end{cases} \qquad J_2(ka) = 0$$

$$u = \frac{A_0}{2}\cdot\frac{J_0(kr)}{J_0(ka)} + \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq 2}}^{\infty} \frac{J_n(kr)}{J_n(ka)}(A_n \cos n\varphi +$$

$$B_n \sin n\varphi) + J_2(kr)(A_2\cos 2\varphi + B_2 \sin 2\varphi)$$

$$u|_{r=a} = \frac{A_0}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq 2}}^{\infty} A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi =$$

$$= \frac{3\sin\varphi - \sin 3\varphi}{4}$$

$$A_n = 0 \quad \forall n \qquad B_n = \begin{cases} \frac{3}{4}, & n = 1 \\ -\frac{1}{4}, & n = 3 \\ 0, & n \neq 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$u = \frac{3}{4}\cdot\frac{J_1(kr)}{J_1(ka)}\sin\varphi - \frac{1}{4}\frac{J_3(kr)}{J_3(ka)}\sin 3\varphi +$$

$$+ J_2(kr)\cdot(A_2\cos 2\varphi + B_2 \sin 2\varphi)$$

Обратите внимание: ГУ предполагает участие n=3 и n=1. Тем не менее, в ответе, помимо $J_1()$ и $J_3()$, отметилась также $J_2()$. Почему?
Ответ: $J_2(kr)*(A\cos 2\varphi+B\sin 2\varphi)$ оказалась СФ. Её добавление к ответу (причём с произвольным коэфом) не испортит ГУ (так там она ноль), а уравнению Гельмгольца она удовлетворит.
Так что пока J1 и J3 с вполне чёткими коэфами, у $J_2(kr)*(A\cos 2\varphi+B\sin 2\varphi)$ коэфы A и B произвольные.
Ситуация аналогичная ситуации, когда мы к решению неоднородного дифура можем добавить решение однородного с любым коэфом, и это по-прежнему будет решение.

Отметим, что случай резонанса достаточно редок. Чуть-чуть поменяем k или радиус a – и уже $J_2(kr)*(A\cos 2\varphi+B\sin 2\varphi)$ не будет СФ, и её в ответе не будет.

Теперь изучим уравнение $\Delta u-æ^2u=0$. Всё совершенно аналогично, только вместо функций Бесселя и Неймана - Инфельда и Макдональда:

2) $C=-æ^2<0$

$$\frac{r\frac{d}{dr}(rR')-æ^2r^2R}{R}=-\frac{\Phi''}{\Phi}=\nu$$

$$\Phi_n=\begin{cases}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{cases},\ \nu_n=n^2,\ n=0,1\ldots$$

$$r^2R''+rR'+(-æ^2r^2-n^2)R=0$$

$$R_n=AI_n(ær)+BK_n(ær)$$

$$u_n=\left.\begin{matrix}I_n(ær)\\ K_n(ær)\end{matrix}\right\}\begin{cases}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{cases}$$

Этот случай даже ещё приятнее, потому что резонанс тут невозможен (т.к. ни Инфельд, ни Макдональд не являются СФ) и единственное решение будет всегда.

Пример:

$$\begin{cases} \Delta u - \varkappa^2 u = 0, \ r < a \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = \cos 2\varphi \end{cases}$$

Раскладываем по псевдо-СФ:

$$u = \frac{A_0}{2} \frac{I_0(\varkappa r)}{\varkappa I_0'(\varkappa a)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n(\varkappa r)}{\varkappa I_n'(\varkappa a)} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

Подстановка ГУ:

$$\left. u_r \right|_{r=a} = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = \cos 2\varphi$$

Все Вшки нуль, среди Ашек не ноль только A_2 и она будет равна 1.

Ответ: $$u = \frac{I_2(\varkappa r)}{\varkappa I_2'(\varkappa a)} \cdot \cos 2\varphi$$

Ещё пример:

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, \quad a < r < b, \ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ \left. u \right|_{r=a} = \cos^3\varphi = \frac{3}{4}\cos\varphi + \frac{1}{4}\cos 3\varphi \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b} = 1 \end{cases}$$

Буткарёв предлагает интересную ФСР решения:

$$R_n^{(a)}(r) = N_n(ka) J_n(kr) - J_n(ka) N_n(kr)$$

$$R_n^{(b)}(r) = N'(kb) J_n(kr) - J_n'(kb) N_n(kr)$$

Так будет удобнее всего подставлять.

$$u = \frac{A_0}{2}\frac{R_0^{(a)}(r)}{R_0^{(a)}(b)} + \frac{C_0}{2}\frac{R_0^{(b)}(r)}{R_0^{(b)}(a)} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{R_n^{(a)}(r)}{R_n^{(a)}(b)}(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{R_n^{(b)}(r)}{R_n^{(b)}(a)}\cdot$$

$$\cdot(C_n\cos n\varphi + D_n\sin n\varphi)$$ // предположим, что k^2 не совпадает с СЗ

Надпись «предположим, что k^2 не совпадает с СЗ», т.е. нет резонанса.

Теперь что там в сферической СК?

Если $\Delta u+k^2u=0$, то

$$u_{nm}(r,\theta,\varphi) = \left[A_n \underbrace{\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}}}_{\text{огр. при } r\to 0} + B_n \underbrace{\frac{N_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}}}_{\text{неогр. при } r\to 0}\right] Y_n^{(m)}(\theta,\varphi), \qquad n = 0, 1, \dots,$$

$m = 0, \pm 1, \dots, \pm n,$

где $Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$ — сферические функции.

И именно по таким псевдо-СФ нужно раскладывать.

$$u = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}\sqrt{\frac{a}{r}}\,\frac{J_{n+1/2}(kr)}{J_{n+\frac{1}{2}}(ka)}\,P_n^{(m)}(\cos\theta)\cdot$$

$$\cdot(A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi)$$

$$u\big|_{r=a} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} P_n^{(m)}(\cos\theta)(A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi) = f(\theta,\varphi)$$

Где коэф-ты Anm и Bnm считаются по формулам

$$A_{nm} = \frac{1}{\|Y_n^{(m)}(\theta)\|^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta,\varphi)\cdot P_n^{(m)}(\cos\theta)\cdot\cos m\varphi\,\sin\theta\,d\varphi\,d\theta$$

$$B_{nm} = \frac{1}{\|Y_n^{(m)}(\theta)\|^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta,\varphi)\cdot P_n^{(m)}(\cos\theta)\cdot\sin m\varphi\,\sin\theta\,d\varphi\,d\theta$$

Если $\Delta u-k^2u=0$, то всё точно так же, только вместо Бесселя Инфельд. Как раз он будет в следующем примере:

$$\begin{cases} \Delta u - \varkappa^2 u = 0, \ r < a \quad (\text{шар}) \\ u\big|_{r=a} = \begin{cases} v_0, & 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < \theta \le \pi \end{cases} \end{cases}$$

Нет никакой зависимости от φ. Это сразу позволяет избавиться от одного из суммирований – по m.

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{a}{r}} \, \frac{I_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa r)}{I_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa a)} P_n(\cos\theta) \cdot A_n$$

А теперь надо подставить ГУ

$$u\big|_{r=a} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos\theta) = \begin{cases} v_0, & 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < \theta \le \pi \end{cases}$$

И нам сейчас предстоит раскладывать кусочно-константную функцию по полиномам Лежандра от косинуса θ. Кстати, а как это делать? По косинусам-синусам мы худо-бедно преобразования Фурье писать научились, а здесь?

$$A_{nm} = \frac{1}{\|Y_n^{(m)}(\theta)\|^2} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta,\varphi) \cdot P_n^{(m)}(\cos\theta) \cdot \cos m\varphi \, \sin\theta \, d\varphi \, d\theta$$

$$B_{nm} = \frac{1}{\|Y_n^{(m)}(\theta)\|^2} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta,\varphi) \cdot P_n^{(m)}(\cos\theta) \cdot \sin m\varphi \, \sin\theta \, d\varphi \, d\theta$$

По m у нас вырождение, это 0, поэтому интеграл по φ берётся тривиально и осталось взять по θ

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta$$

Sin θ ещё удачно под дифференциал затаскивается, что позволяет сделать замену переменных cos θ =x

$$\frac{2n+1}{2}\int_{0}^{1} P_n(x)\,dx \cdot \vec{v}_0$$

Далее рассмотрим два случая: чётных и нечётных n.

У чётных n полиномы $P_n(x)$ чётные => мы можем расширить область интегрирования до [-1..1], добавив коэф ½. На этом отрезке $P_n(x)$ ортогонален $P_0(x)$, т.е. 1, если только не n=0 (свойство системы полиномов Лежандра).

Поэтому A_0 будет $A_0 = \frac{1}{2} v_0$

А что делать, если n нечётное? Формулой

$$P_n(x) = \frac{1}{2n+1}\left(P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)\right)$$

воспользоваться. А производные под интеграл подставлять так вообще кайф, просто формула Ньютона-Лейбница. Получится

$$\left[P_n(1)=0\right]$$

$$= \frac{1}{4k+3}\left(-P_{2k+2}(0) + P_{2k}(0)\right) =$$

$$P_{2k}(0) = (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$$

$$= \frac{1}{4k+3}\left(P_{2k}(0) - P_{2k+2}(0)\right)$$

для $P_{2k+1}(0)=0$ (нечёт)

$$A_{2k+1} = (-1)^k \frac{4k+3}{k+1} \cdot \frac{(2k)!}{2^{2k+2}(k!)^2} \cdot v_0$$

Пример в декартовой СК.

Задача в прямоугольнике.

$$\begin{cases} \Delta u - \varkappa^2 u = 0 \\ u|_{x=0} = \sin y; \quad u|_{x=\pi} = -\sin y \\ u|_{y=0} = \sin 2x \quad u|_{y=\pi} = \sin 2x \end{cases}$$

Как это было с решением уравнения Лапласа в треугольнике, разбиваем на две стандартные задачи:

$$\begin{cases} \Delta \bar{u} - \varkappa^2 \bar{u} = 0 \\ \bar{u}|_{x=0,\pi} = 0 \\ \bar{u}|_{y=0,\pi} = \sin 2x \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \Delta \bar{\bar{u}} - \varkappa^2 \bar{\bar{u}} = 0 \\ \bar{\bar{u}}|_{x=0} = \sin y; \quad \bar{\bar{u}}|_{x=\pi} = -\sin y \\ u|_{y=0,\pi} = 0. \end{cases}$$

Они аналогичны друг другу, разберём лишь первую:

Решим сначала 1-ю стандартную задачу.

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} + \varkappa^2 = f^2$$

$$\begin{cases} X'' + fX = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$X_n(x) = \sin nx$$

$$Y'' - (\varkappa^2 + n^2)Y = 0$$

$$Y(y) = A_n \operatorname{sh}\sqrt{\varkappa^2+n^2}\,y + B_n \operatorname{sh}\sqrt{\varkappa^2+n^2}\,(\pi - y)$$

$$\overline{u}_n = \sin nx \begin{cases} \operatorname{sh}\sqrt{\varkappa^2+n^2}\,y \\ \operatorname{sh}\sqrt{\varkappa^2+n^2}\,(\pi - y) \end{cases}$$

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{u}_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\operatorname{sh}\sqrt{\varkappa^2+n^2}\,\pi}\left(A_n \operatorname{sh}\sqrt{\varkappa^2+n^2}\,y + B_n \operatorname{sh}\sqrt{\varkappa^2+n^2}\,(\pi - y)\right)$$

$$\overline{u}\big|_{y=0} = \sum_{n=1} B_n \sin nx = \sin 2x \qquad A_n = B_n = \delta_{n2}$$

$$\overline{u}\big|_{y=\pi} = \sum A_n \sin nx = \sin 2x$$

$$\overline{u} = \frac{\sin 2x}{\operatorname{sh}\sqrt{\varkappa^2+4}\,\pi}\left(\operatorname{sh}\sqrt{\varkappa^2+4}\,y + \operatorname{sh}\sqrt{\varkappa^2+4}\,(\pi - y)\right).$$